

7. त्रिभुजों की सर्वांगसमता

पृष्ठ 145

प्रश्न : क्या अब आप बता सकते हैं कि निम्न वस्तुएँ सर्वांगसम हैं या नहीं?

1. एक ही कंपनी के शेविंग ब्लेड।
2. एक ही लेटर पैड की शीटें।
3. एक ही पैकेट के बिस्कुट।
4. एक ही साँचे से बने खिलौने।

हल : 1. क्योंकि एक ही कंपनी के दो ब्लेडों को जब एक दूसरे पर रखते हैं तो वे ठीक-ठीक पूरा ढक लेते हैं, अतः ये सर्वांगसम हैं।

2. क्योंकि एक ही लेटर पैड की शीटों को जब एक दूसरे पर रखते हैं तो वे एक दूसरे को पूरी तरह ढक लेते हैं, अतः ये सर्वांगसम हैं।

3. जब एक ही जैसे पैकेट के दो बिस्कुटों को एक दूसरे पर रखते हैं तो वे एक दूसरे को पूरी तरह ढक लेते हैं। अतः ये सर्वांगसम हैं।

4. एक ही साँचे से बने खिलौने आकृति और आकार में समान होते हैं। अतः ये सर्वांगसम होते हैं।

पृष्ठ 149 **सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए**

प्रश्न : जब दो त्रिभुज, मान लीजिए ABC और PQR, दिए हुए हों तो उनमें आपस में कुल छः संभव सुमेलन होते हैं। उनमें से दो सुमेलन ये हैं :

(i) $ABC \leftrightarrow PQR$ और (ii) $ABC \leftrightarrow QRP$

दो त्रिभुजों के कट-आउट (cutouts) का प्रयोग करके अन्य चार सुमेलनों को ज्ञात कीजिए। क्या ये सभी सुमेलन सर्वांगसमता दर्शाते हैं? इसके बारे में विचार कीजिए।

हल : दो त्रिभुजों ABC और PQR में, इनके शीर्षों में निम्न छः सुमेलन होते हैं :

(i) $A \leftrightarrow P, B \leftrightarrow Q$ और $C \leftrightarrow R$ को लिखते हैं :

$$ABC \leftrightarrow PQR$$

(ii) $A \leftrightarrow Q, B \leftrightarrow R$ और $C \leftrightarrow P$ को लिखते हैं :

$$ABC \leftrightarrow QRP$$

(iii) $A \leftrightarrow R, B \leftrightarrow P$ और $C \leftrightarrow Q$ को लिखते हैं :

$$ABC \leftrightarrow RPQ$$

(iv) $A \leftrightarrow P, B \leftrightarrow R$ और $C \leftrightarrow Q$ को लिखते हैं :

$$ABC \leftrightarrow PRQ$$

(v) $A \leftrightarrow Q, B \leftrightarrow P$ और $C \leftrightarrow R$ को लिखते हैं :

$$ABC \leftrightarrow QPR$$

(vi) $A \leftrightarrow R, B \leftrightarrow Q$ और $C \leftrightarrow P$ को लिखते हैं :

$$ABC \leftrightarrow RQP$$

यदि $\triangle ABC, \triangle PQR$ के सर्वांगसम है तो $\triangle ABC$ के शीर्षों के छः सुमेलन $\triangle PQR$ के ठीक-ठीक समान होंगे। इस विशेष सुमेलन संगत भुजा और कोण सर्वांगसम होंगे।

पृष्ठ 149

प्रश्नावली 7.1

प्रश्न 1. निम्न कथनों को पूरा कीजिए :

(a) दो रेखाखंड सर्वांगसम होते हैं, यदि _____।

(b) दो सर्वांगसम कोणों में से एक की माप 70° है, दूसरे कोण की माप _____ है।

(c) जब हम $\angle A = \angle B$ लिखते हैं, हमारा वास्तव में अर्थ होता है _____।

हल : (a) इनकी लंबाई समान हो

(b) 70° (c) $m\angle A = m\angle B$

प्रश्न 2. वास्तविक जीवन से संबंधित सर्वांगसम आकारों के कोई दो उदाहरण दीजिए।

हल : समान मान के दो सिक्के अथवा नोट, एक ताले की दो चाबियाँ सर्वांगसम आकार के दो उदाहरण हैं।

प्रश्न 3. यदि सुमेलन $ABC \leftrightarrow FED$ के अंतर्गत $\triangle ABC \cong \triangle FED$ तो त्रिभुजों के सभी संगत सर्वांगसम भागों को लिखिए।

हल : $\triangle ABC \cong \triangle FED$ का अर्थ $\triangle ABC, \triangle FED$ को पूरी तरह ठीक-ठीक ढक लेगा तथा $\triangle ABC$ के शीर्ष क्रमशः $\triangle FED$ के शीर्षों पर निम्न क्रम में होंगे $A \leftrightarrow F, B \leftrightarrow E$ और $C \leftrightarrow D$

तब हमारे पास छः निम्नलिखित संगत सर्वांगसम भाग हैं :

$\angle A \leftrightarrow \angle F, \angle B \leftrightarrow \angle E$ और $\angle C \leftrightarrow \angle D$

(अर्थात् संगत कोण सर्वांगसम हैं।)

$\overline{AB} \leftrightarrow \overline{FE}, \overline{BC} \leftrightarrow \overline{ED}, \overline{CA} \leftrightarrow \overline{DF}$

(अर्थात् संगत भुजाएँ सर्वांगसम हैं।)

प्रश्न 4. यदि $\triangle DEF \cong \triangle BCA$ हो, तो $\triangle BCA$ के उन भागों को लिखिए जो निम्न के संगत हों :

(i) $\angle E$ (ii) \overline{EF} (iii) $\angle F$ (iv) \overline{DF}

हल : यदि $\triangle DEF \cong \triangle BCA$ हो तो

$D \leftrightarrow B, E \leftrightarrow C$ और $F \leftrightarrow A$

अतः, $\triangle BCA$ के भाग संगत होंगे।

(i) $\angle E, \angle C$ के

(ii) $\overline{EF}, \overline{CA}$ के

(iii) $\angle F, \angle A$ के

(iv) $\overline{DF}, \overline{BA}$ के

अभ्यास प्रश्नावली

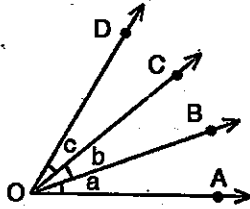
1. रिक्त स्थानों को भरिए :

(i) दो वर्ग सर्वांगसम होंगे यदि इनमें _____।

(ii) दो वृत्त सर्वांगसम होंगे यदि इनमें _____।

(iii) दो आयत सर्वांगसम होंगे यदि इनमें _____।

2. आकृति में यदि $a = b = c$ हो तो उस कोण का नाम बताइए जो $\angle BOD$ के सर्वांगसम हो।



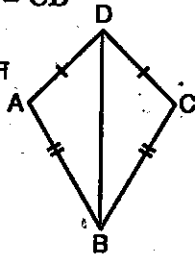
3. त्रिभुजों को बिना बनाए निम्नलिखित सर्वांगसम त्रिभुजों के युग्म में से संगत भुजा और कोणों को बताइए :

$$\triangle ABC \cong \triangle QRP$$

4. आकृति में, $AD = CD$ और $AB = CB$

(i) क्या $\triangle ABD \cong \triangle CBD$?

(ii) उत्तर (i) प्रयोग किए गए तीन सुमेलन युग्मों को लिखिए।



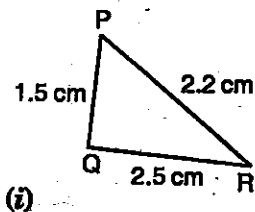
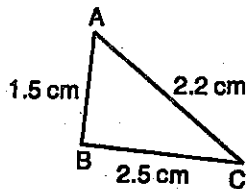
उत्तरमाला

- (i) समान लंबाई की भुजाएँ हों,
(ii) त्रिज्याएँ समान हों
(iii) लंबाई और चौड़ाई समान हो
- $\angle AOC$
- $AB = QR, BC = RP, AC = QP, \angle A = \angle Q, \angle B = \angle R$ और $\angle C = \angle P$
- (i) हाँ (ii) $AB, CB; AD, CD; BD, BD$

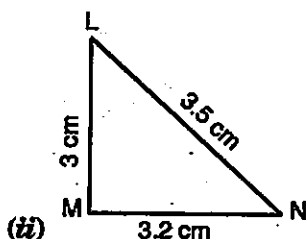
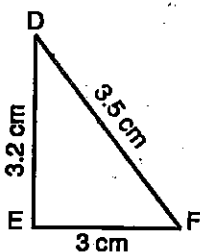
पृष्ठ 152-153

प्रयास कीजिए

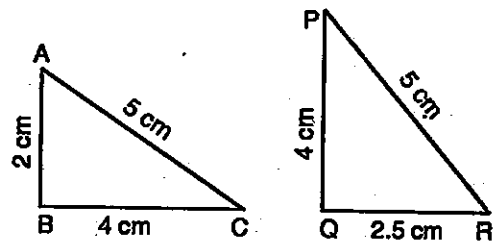
प्रश्न 1. आकृतियों में त्रिभुजों की भुजाओं की लंबाइयाँ दर्शाई गई हैं। SSS सर्वांगसमता प्रतिबंध का प्रयोग करके बताइए कि कौन-कौन से त्रिभुज-युग्म सर्वांगसम हैं। सर्वांगसमता की स्थिति में, उत्तर को सांकेतिक रूप में लिखिए।



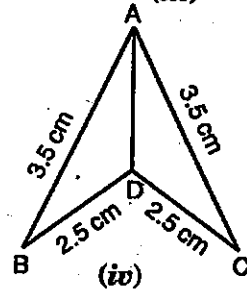
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

हल : (i) $\triangle ABC$ और PQR में,

$$AB = PQ (= 1.5 \text{ cm})$$

$$BC = QR (= 2.5 \text{ cm})$$

और

$$CA = RP (= 2.2 \text{ cm})$$

अतः, SSS सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा

$$\triangle ABC \cong \triangle PQR$$

(ii) $\triangle DEF$ और $\triangle LMN$ में, दिया है :

$$EF = ML (= 3 \text{ cm})$$

$$ED = MN (= 3.2 \text{ cm})$$

और

$$DF = NL (= 3.5 \text{ cm})$$

अतः, SSS सर्वांगसमता प्रतिबंध से, निम्नलिखित संगत भाग हैं :

$$D \leftrightarrow N, E \leftrightarrow M \text{ और } F \leftrightarrow L$$

इस प्रकार, $\triangle DEF \cong \triangle NML$

(iii) $\triangle ABC$ और $\triangle PQR$ सर्वांगसम नहीं हैं।

(iv) $\triangle ADB$ और $\triangle ADC$ में,

$$AD = AD \text{ (उभयनिष्ठ)}$$

$$DB = DC (= 2.5 \text{ cm})$$

और

$$BA = CA (= 3.5 \text{ cm})$$

\therefore SSS सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा

$$\triangle ADB \cong \triangle ADC$$

प्रश्न 2. आकृति में, $AB = AC$ और D, BC का मध्य बिंदु है।

(i) $\triangle ADB$ और $\triangle ADC$ में बराबर भागों के तीन युग्म बताइए।

(ii) क्या $\triangle ADB \cong \triangle ADC$ है? कारण दीजिए।

(iii) क्या $\angle B = \angle C$ है? क्यों?

हल : (i) $\triangle ADB$ तथा $\triangle ADC$ में,

$$AD = AD$$

$$AB = AC$$

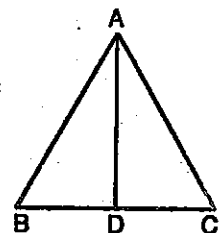
$$DB = DC$$

और

[उभयनिष्ठ]

[दिया है]

$\therefore D, BC$ का मध्य बिंदु है।

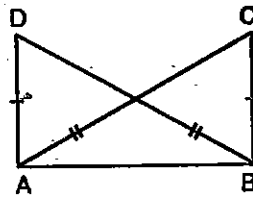


(ii) SSS सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा

$$\triangle ADB \cong \triangle ADC$$

(iii) नहीं, $\angle B = \angle C$ [\because सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग समान होते हैं]

प्रश्न 3. आकृति में, $AC = BD$ और $AD = BC$ है। निम्नलिखित कथनों में कौन-सा कथन सत्य है?



(i) $\triangle ABC \cong \triangle ABD$

(ii) $\triangle ABC \cong \triangle BAD$

हल : (i) $\triangle ABC \cong \triangle ABD$ नहीं लिख सकते

$$AB = AB \quad [\text{सही है}]$$

$$BC = BD \quad [\text{सही नहीं है}]$$

और $CA = DA$ [सही नहीं है]

(ii) $\triangle ABC \cong \triangle BAD$ लिख सकते हैं।

$$AB = AB \quad [\text{उभयनिष्ठ}]$$

$$BC = AD \quad [\text{दिया है}]$$

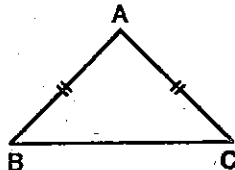
और $CA = BD$ [दिया है]

पृष्ठ 153

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

प्रश्न : ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$ है।

$\triangle ABC$ की एक अवस प्रतिलिपि लीजिए और इसे भी $\triangle ABC$ का नाम दीजिए।



(i) $\triangle ABC$ और $\triangle ACB$ में बराबर भागों के तीन युग्म बताइए।

(ii) क्या $\triangle ABC \cong \triangle ACB$ है? क्यों अथवा क्यों नहीं?

(iii) क्या $\angle B = \angle C$ है? क्यों अथवा क्यों नहीं?

हल : (i) $\triangle ABC$ और $\triangle ACB$ में तीन समान भाग हैं,

$$AB = AC$$

$$AC = AB$$

और $BC = CB$

(ii) $\triangle ABC$ और $\triangle ACB$ में,

$$AB = AC$$

$$BC = CB$$

और $AC = AB$

\therefore SSS सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा

$$\triangle ABC \cong \triangle ACB$$

(iii) हाँ, $\angle B = \angle C$

[सर्वांगसम त्रिभुजों ABC और ACB के संगत भाग]

पृष्ठ 156

इन्हें कीजिए

प्रश्न 1. $\triangle DEF$ की भुजाओं \overline{DE} और \overline{EF} का अंतर्गत कोण कौन-सा है?

हल : $\angle DEF$ की भुजाओं \overline{DE} और \overline{EF} के अंतर्गत $\angle DEF$ है।

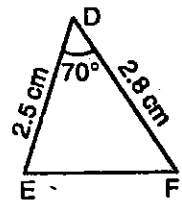
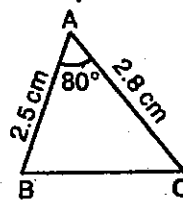
प्रश्न 2. SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग करके आप $\triangle PQR \cong \triangle FED$ स्थापित करना चाहते हैं। यह दिया गया है कि $PQ = FE$ और $RP = DF$ है। सर्वांगसमता को स्थापित करने के लिए अन्य किस तथ्य या सूचना की आवश्यकता होगी?

हल : $\triangle PQR \cong \triangle FED$ को स्थापित करने के लिए अतिरिक्त जानकारी की आवश्यकता होगी, वह है

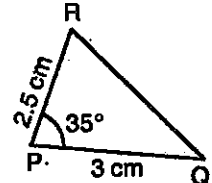
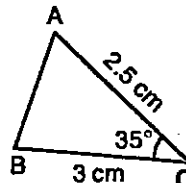
$$\angle P = \angle F.$$

ये क्रमशः दो भुजाओं PQ और RP तथा FE और DF के बीच के कोण हैं।

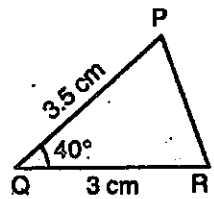
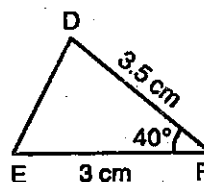
प्रश्न 3. आकृति में, त्रिभुजों के युग्मों में कुछ भागों की माप अंकित की गई है। SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग करके, इनमें वे युग्म छाँटिए जो सर्वांगसम हैं। सर्वांगसम त्रिभुजों की स्थिति में उन्हें सांकेतिक रूप में भी लिखिए।



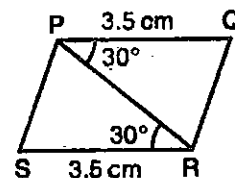
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

हल : (i) $\triangle ABC$ और $\triangle DEF$ सर्वांगसम नहीं हैं।

(ii) $\triangle ACB$ और $\triangle RQP$ में,

$$AC = RP (= 2.5 \text{ cm})$$

$$\angle C = \angle P (= 35^\circ)$$

और

$$CB = PQ (= 3 \text{ cm})$$

\therefore SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा

$$\triangle ACB = \triangle RQP$$

(iii) $\triangle DEF$ और $\triangle PQR$ में

$$DF = PQ (= 3.5 \text{ cm})$$

$$\angle F = \angle Q (= 40^\circ)$$

$$\text{और } FE = QQ (= 3 \text{ cm})$$

इसलिए, SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध से, निम्नलिखित संगतता से ये त्रिभुज सर्वांगसम हैं :

$$D \leftrightarrow P, F \leftrightarrow Q \text{ और } E \leftrightarrow R$$

$$\text{इस प्रकार, } \triangle DEF \cong \triangle PRQ$$

(iv) $\triangle RSP$ और $\triangle PQR$ में,

$$RS = PQ (= 3.5 \text{ cm})$$

$$\angle PRS = \angle RPQ (= 30^\circ)$$

$$\text{और } RP = PR \text{ [उभयनिष्ठ]}$$

\therefore SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा

$$\triangle RSP \cong \triangle PQR$$

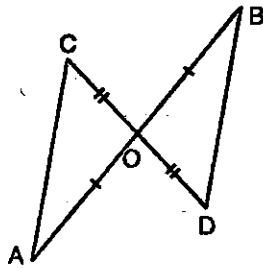
प्रश्न 4. आकृति में, \overline{AB} और \overline{CD} एक दूसरे को O पर समद्विभाजित करते हैं।

(i) दोनों त्रिभुजों AOC और BOD में बराबर भागों के तीन युग्मों को बताइए।

(ii) निम्न कथनों में से कौन-से कथन सत्य हैं?

$$(a) \triangle AOC \cong \triangle DOB$$

$$(b) \triangle AOC \cong \triangle BOD$$



हल : (i) दो $\triangle AOC$ और $\triangle BOD$ में तीन समान जोड़े

हैं : $AO = BO$, $CO = DO$ और $\angle AOC = \angle BOD$

(ii) (b) सत्य है।

पृष्ठ 158

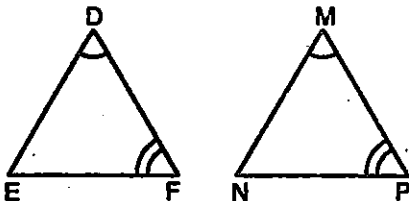
इन्हें कीजिए

प्रश्न 1. $\triangle MNP$ में कोणों, M और N के अंतर्गत भुजा क्या है?

हल : $\triangle MNP$ में कोण M तथा कोण N के अंतर्गत भुजा MN है।

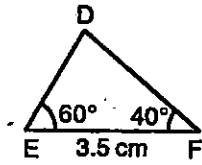
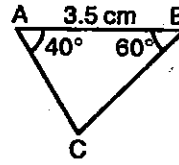
प्रश्न 2. ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग करके आप $\triangle DEF \cong \triangle MNP$ स्थापित करना चाहते हैं। आपको दिया गया है कि $\angle D = \angle M$ और $\angle F = \angle P$ । इस सर्वांगसमता को स्थापित करने के लिए और कौन-से नथ्य की आवश्यकता है? (खाका आकृति बनाकर कोशिश कीजिए)

हल : $\triangle DEF \cong \triangle MNP$ स्थापित करने के लिए ASA सर्वांगसम प्रतिबंध के लिए अतिरिक्त जानकारी होगी।

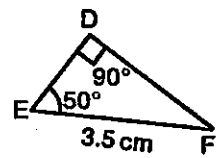
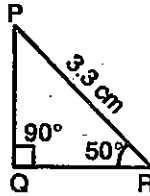


भुजा $DF =$ भुजा MP

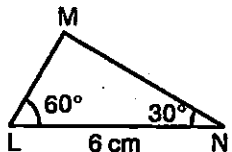
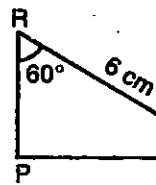
प्रश्न 3. आकृतियों में, त्रिभुजों के कुछ भागों की माप अंकित की गई है। ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग करके बताइए कौन-से त्रिभुजों के युग्म सर्वांगसम हैं। सर्वांगसमता की स्थिति में, उत्तर को सांकेतिक रूप में लिखिए।



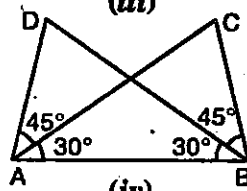
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

हल : (i) $\triangle ABC$ और $\triangle EFD$ में,

$$\angle A = \angle F (= 40^\circ)$$

$$AB = FE (= 3.5 \text{ cm})$$

और

$$\angle B = \angle E (= 60^\circ)$$

\therefore ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध से, अग्रलिखित संगतता से ये त्रिभुज सर्वांगसम हैं :

$$A \leftrightarrow F, B \leftrightarrow E \text{ और } C \leftrightarrow D$$

$$\text{इस प्रकार, } \triangle ABC \cong \triangle FED$$

(ii) दिए गए त्रिभुज सर्वांगसम नहीं हैं।

(iii) $\triangle PQR$ और $\triangle MNL$ में,

$$\angle R = \angle L (= 60^\circ)$$

$$QR = NL (= 6 \text{ cm})$$

और

$$\angle Q = \angle N (= 30^\circ)$$

\therefore ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा

$$\triangle PQR \cong \triangle MNL$$

(iv) $\triangle ABC$ और $\triangle BAD$ में,

$$\angle CAB = \angle DBA (= 30^\circ)$$

$$AB = BA$$

[उभयनिष्ठ]

और

$$\angle ABC = \angle BAD (= 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ)$$

\therefore ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा

$$\triangle ABC \cong \triangle BAD$$

प्रश्न 4. दो त्रिभुजों के कुछ भागों की निम्न माप दी गई है। ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग करके जाँचिए कि क्या ये दो त्रिभुज सर्वांगसम हैं या नहीं। सर्वांगसमता की स्थिति में उत्तर को सांकेतिक रूप में भी लिखिए।

$\triangle DEF$ $\triangle PQR$

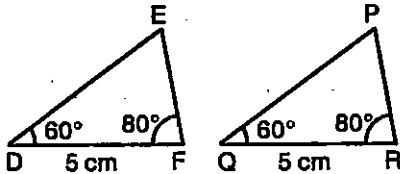
- (i) $\angle D = 60^\circ, \angle F = 80^\circ, \angle Q = 60^\circ, \angle R = 80^\circ,$
 $DF = 5 \text{ cm} \quad QR = 5 \text{ cm}$
- (ii) $\angle D = 60^\circ, \angle F = 80^\circ, \angle Q = 60^\circ, \angle R = 80^\circ,$
 $DF = 6 \text{ cm} \quad QP = 6 \text{ cm}$
- (iii) $\angle E = 80^\circ, \angle F = 30^\circ, \angle P = 80^\circ,$
 $EF = 5 \text{ cm} \quad PQ = 5 \text{ cm},$
 $\angle R = 30^\circ$

हल : (i) $\triangle DFE$ और $\triangle QRP$ में,

$$\angle D = \angle Q (= 60^\circ)$$

$$DF = QR (= 5 \text{ cm})$$

और $\angle F = \angle R (= 80^\circ)$

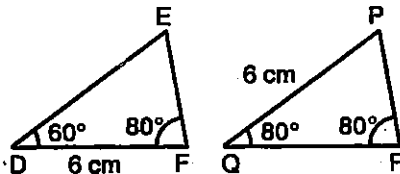


\therefore ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा

$$\triangle DFE \cong \triangle QRP$$

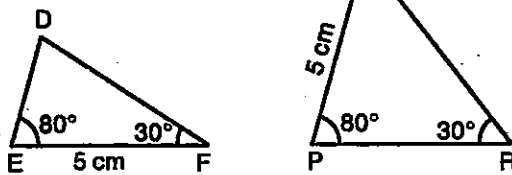
(ii) क्योंकि समान कोणों के बीच की भुजाएँ DF और QR समान नहीं हैं, इसलिए दिए गए त्रिभुज समान नहीं हैं, इसलिए

त्रिभुजें सर्वांगसम नहीं हैं।



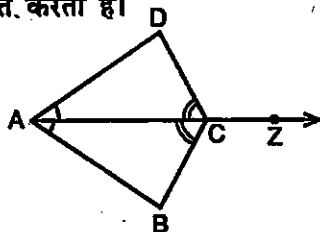
(iii) $\triangle DEF$ और $\triangle QPR$ में,

और $\angle E = \angle P (= 80^\circ)$
 $\angle F = \angle R (= 30^\circ)$



परंतु EF भुजा PR के बाहर नहीं है (यह भुजा PQ के बराबर है)। इसलिए, दोनों त्रिभुजें सर्वांगसम हैं।

प्रश्न 5. आकृति में, किरण AZ, $\angle DAB$ तथा $\angle DCB$ को समद्विभाजित करती है।



(i) त्रिभुजों BAC और DAC में बराबर भागों के तीन युग्म बताइए।

(ii) क्या $\triangle BAC \cong \triangle DAC$ है? कारण दीजिए।

(iii) क्या $AB = AD$ है? अपने उत्तर का उचित कारण दीजिए।

(iv) क्या $CD = CB$ है? कारण दीजिए।

हल : (i) $\triangle BAC$ तथा $\triangle DAC$ में तीन समान युग्म हैं
 $\angle BAC = \angle DAC, AC = AC$ और $\angle BCA = \angle DCA$

(ii) हाँ, ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा

$$\triangle BAC \cong \triangle DAC$$

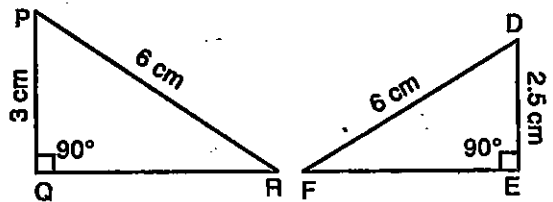
(iii) हाँ, $AB = AD$ [\because सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग समान होते हैं]

(iv) हाँ, $CD = CB$ [\because सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग समान होते हैं]

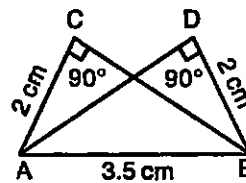
पृष्ठ 160-161

इन्हें कीजिए

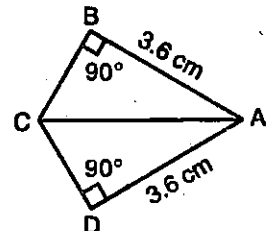
प्रश्न 1. आकृतियों में, त्रिभुजों के कुछ भागों की माप दी गई है। RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध का उपयोग करके बताइए कि कौन-कौन से त्रिभुज युग्म सर्वांगसम हैं? सर्वांगसम त्रिभुजों की स्थिति में, उन्हें सांकेतिक रूप में लिखिए।



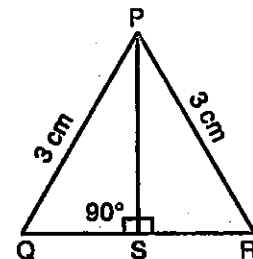
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

हल : (i) $\triangle PQR$ और $\triangle DEF$ सर्वांगसम नहीं हैं।

(ii) $\triangle CAB$ तथा $\triangle DBA$ में,

$$\angle C = \angle D (= 90^\circ)$$

$$AB = BA (= 3.5 \text{ cm})$$

और $CA = DB (= 2 \text{ cm})$

\therefore RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा

$$\triangle CAB \cong \triangle DBA$$

(iii) ΔABC और ΔADC में,
 $\angle B = \angle D (= 90^\circ)$
 कर्ण $AC =$ कर्ण AC [उभयनिष्ठ]

और $AB = AD (= 3.6 \text{ cm})$

\therefore RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा
 $\Delta ABC \cong \Delta ADC$

(iv) ΔPSQ और ΔPSR में,
 $\angle PSQ = \angle PSR (= 90^\circ)$
 कर्ण $PQ =$ कर्ण $PR (= 3 \text{ cm})$

और $PS = PS$ [उभयनिष्ठ]

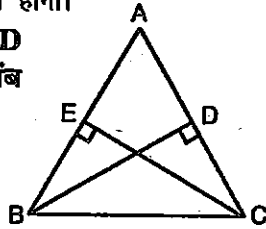
\therefore RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा
 $\Delta PSQ \cong \Delta PSR$

प्रश्न 2. RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध से $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ स्थापित करना है। यदि यह दिया गया हो कि $\angle B = \angle P = 90^\circ$ और $AB = RP$ है तो अन्य किस और सूचना की आवश्यकता है?

हल : RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा $\Delta ABC \cong \Delta RPQ$ स्थापित करने के लिए हमें कर्ण $AC =$ कर्ण RQ को समान करने की आवश्यकता होगी।

प्रश्न 3. आकृति में, BD और CE , ΔABC के शीर्ष लंब हैं और $BD = CE$.

(i) ΔCBD और ΔBCE में, बराबर भागों के तीन युग्म बताइए।



(ii) क्या $\Delta CBD \cong \Delta BCE$ है? क्यों अथवा क्यों नहीं?

(iii) क्या $\angle DCB = \angle ECB$ है? क्यों या क्यों नहीं?

हल : (i) ΔCBD और ΔBCE में तीन समान भागों के युग्म हैं

$CB = BC$, $\angle CDB = \angle BEC$ और $BD = CE$

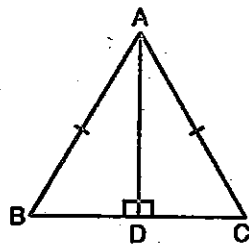
(ii) RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा

$\Delta CBD \cong \Delta BCE$

(iii) हाँ, $\angle DCB = \angle ECB$ (\because सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग समान होते हैं।)

प्रश्न 4. ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AB = AC$ और AD इसका एक शीर्षलंब है।

(i) ΔADB और ΔADC में, बराबर भागों के तीन युग्म बताइए।



(ii) क्या $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ है? क्यों अथवा क्यों नहीं?

(iii) क्या $\angle B = \angle C$ है? क्यों या क्यों नहीं?

(iv) क्या $BD = CD$ है? क्यों या क्यों नहीं?

हल : (i) ΔADB और ΔADC में तीन समान भागों के तीन युग्म हैं

$AD = AD$, $\angle ADB = \angle ADC$ और $AB = AC$

(ii) RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा

$\Delta ADB \cong \Delta ADC$

(iii) हाँ, $\angle B = \angle C$ (\because सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग बराबर होते हैं।)

(iv) हाँ, $BD = CD$ (\because सर्वांगसम त्रिभुज के संगत भाग बराबर होते हैं।)

पृष्ठ 161-163

प्रश्नावली 7.2

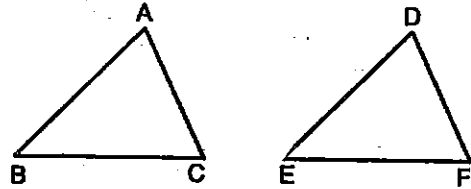
प्रश्न 1. निम्न में आप कौन से सर्वांगसम प्रतिबंधों का प्रयोग करेंगे?

(a) दिया है : $AC = DF$

$AB = DE$

$BC = EF$

इसलिए, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

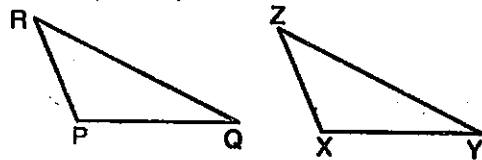


(b) दिया है : $ZX = RP$

$RQ = ZY$

$\angle PRQ = \angle XZY$

इसलिए, $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$

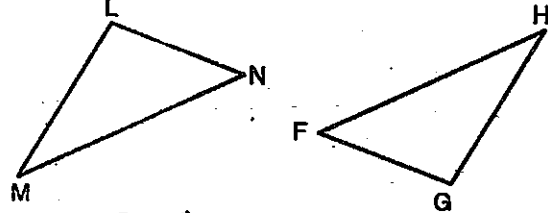


(c) दिया है : $\angle MLN = \angle FGH$

$\angle NML = \angle GFH$

$ML = FG$

इसलिए, $\Delta LMN \cong \Delta GFH$

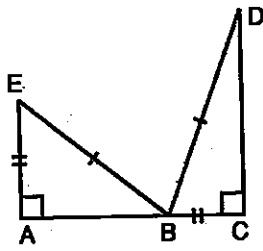


(d) दिया है : $EB = DB$

$AE = BC$

$\angle A = \angle C = 90^\circ$

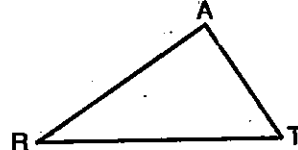
इसलिए, $\Delta ABE \cong \Delta CDB$



- हल : (a) SSS सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा,
 $\Delta ABC \cong \Delta DEF$
 (b) SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा,
 $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$
 (c) ASA सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा,
 $\Delta LMN \cong \Delta GFH$
 (d) RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा
 $\Delta ABE \cong \Delta CDB$

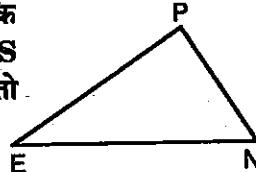
प्रश्न 2. आप $\Delta ART \cong \Delta PEN$ दर्शाना चाहते हैं,

(a) यदि आप SSS सर्वांगसमता प्रतिबंध का प्रयोग करें तो आपको दर्शाने की आवश्यकता है :



- (i) $AR =$ (ii) $RT =$ (iii) $AT =$

(b) यदि यह दिया गया है कि $\angle T = \angle N$ और आपको SAS प्रतिबंध का प्रयोग करना है, तो आपको आवश्यकता होगी :



- (i) $RT =$ और (ii) $PN =$

(c) यदि यह दिया गया है कि $AT = PN$ और आपको ASA प्रतिबंध का प्रयोग करना है तो आपको आवश्यकता होगी :

- (i) ? (ii) ?

हल : (a) $\Delta ART \cong \Delta PEN$ को SSS सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा दर्शाने के लिए दर्शाना होगा

- (i) $AR = PE$ (ii) $RT = EN$
 (iii) $AT = PN$

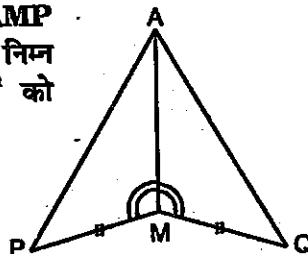
(b) यदि $m\angle T = m\angle N$ और SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा दर्शाने के लिए हमें दर्शाना होगा

- (i) $RT = EN$ और (ii) $PN = AT$

(c) यदि $AT = PN$ और ASA सर्वांगसमता के प्रयोग के लिए आवश्यकता होगी

- (i) $\angle RAT = \angle EPN$ और (ii) $\angle ATR = \angle PNE$

प्रश्न 3. आपको $\Delta AMP \cong \Delta AMQ$ दर्शाना है। निम्न चरणों में, रिक्त कारणों को भरिए।



क्रम	कारण
(i) $PM = QM$	(i) ...
(ii) $\angle PMA = \angle QMA$	(ii) ...
(iii) $AM = AM$	(iii) ...
(iv) $\Delta AMP \cong \Delta AMQ$	(iv) ...

हल : कारण क्रमवार नीचे दिए गए हैं :

- (i) दिया है
 (ii) दिया है
 (iii) उभयनिष्ठ
 (iv) SAS सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा

प्रश्न 4. ΔABC में,

$\angle A = 30^\circ, \angle B = 40^\circ$ और $\angle C = 110^\circ$

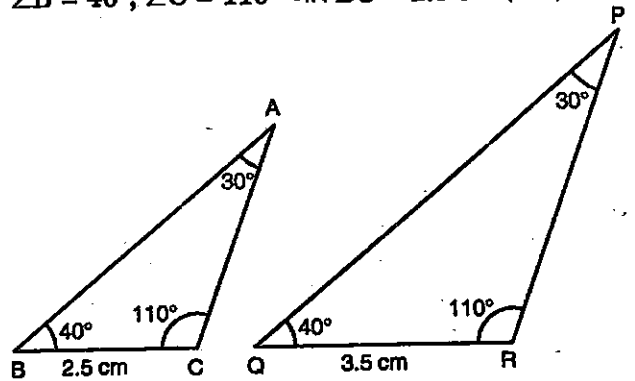
ΔPQR में,

$\angle P = 30^\circ, \angle Q = 40^\circ$ और $\angle R = 110^\circ$

एक विद्यार्थी कहता है कि AAA सर्वांगसमता प्रतिबंध से $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ है। क्या यह कथन सत्य है? क्यों या क्यों नहीं?

हल : दो त्रिभुजों में, एक त्रिभुज के तीनों कोण दूसरे त्रिभुज के तीनों कोणों के बराबर हैं तो आवश्यक नहीं त्रिभुज सर्वांगसम हो।

एक ΔABC की रचना कीजिए जिसमें $\angle A = 30^\circ, \angle B = 40^\circ, \angle C = 110^\circ$ और $BC = 2.5$ cm (माना)।



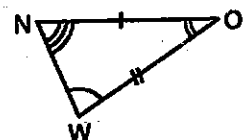
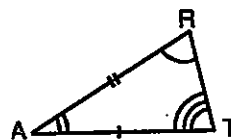
दूसरा ΔPQR की रचना करो जिसमें $\angle P = 30^\circ, \angle Q = 40^\circ, \angle R = 110^\circ$ और $QR = 3.5$ cm

स्पष्टतः त्रिभुजों के संगत कोण बराबर हैं लेकिन यह सर्वांगसम नहीं हैं क्योंकि $BC \neq QR$ ।

अतः छात्र तर्कसंगत नहीं है।

प्रश्न 5. आकृति में दो त्रिभुज ART तथा OWN सर्वांगसम हैं जिनके संगत भागों को अंकित किया गया है। हम लिख सकते हैं

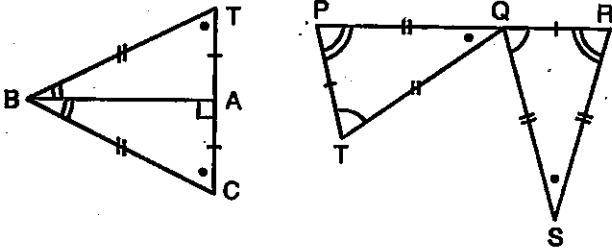
$\Delta RAT \cong ?$



हल : स्पष्टतः दी गई आकृति

$$\Delta RAT \cong \Delta WON$$

प्रश्न 6. कथनों को पूरा कीजिए :



$$\Delta BCA \cong ?$$

$$\Delta QRS \cong ?$$

हल : सर्वांगसम कथन को पूरा करने पर

$$\Delta BCA \cong \Delta BTA$$

$$\Delta QRS \cong \Delta TQP$$

प्रश्न 7. एक वर्गीकृत शीट पर, बराबर क्षेत्रफलों वाले दो त्रिभुजों को इस प्रकार बनाइए कि

(i) त्रिभुज सर्वांगसम हों।

(ii) त्रिभुज सर्वांगसम न हों।

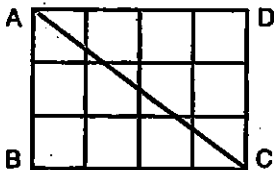
आप उनके परिमाण के बारे में क्या कह सकते हैं?

हल : (i) ΔABC का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \times BC \times AB$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 3 \text{ वर्ग इकाई}$$

$$= 6 \text{ वर्ग इकाई}$$



और ΔDCA का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \times DC \times DA$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \text{ वर्ग इकाई}$$

$$= 6 \text{ वर्ग इकाई}$$

$\therefore \Delta ABC$ का क्षेत्रफल = ΔDCA का क्षेत्रफल

ΔABC और ΔDCA में,

$$AB = CD$$

$$\angle B = \angle D$$

और $AC = CA$

\therefore RHS सर्वांगसमता प्रतिबंध द्वारा

$$\Delta ABC \cong \Delta DCA$$

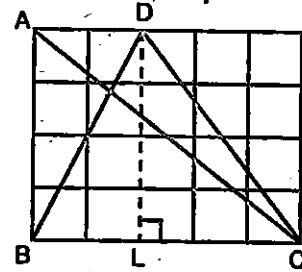
अतः समान क्षेत्रफलों वाले दो त्रिभुज खींचिए।

(ii) यहाँ ΔABC का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \times BC \times AB$$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times 4 \text{ वर्ग इकाई}$$

$$= 10 \text{ वर्ग इकाई}$$



और ΔDBC का क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \times BC \times DL$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times 5 \times 4 \right) \text{ वर्ग इकाई} = 10 \text{ इकाई}$$

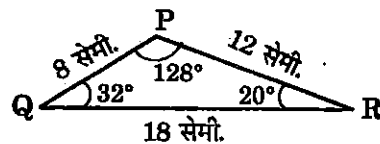
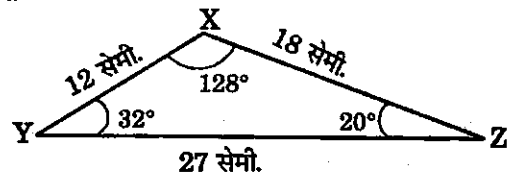
$\therefore \Delta ABC$ का क्षेत्रफल = ΔDBC का क्षेत्रफल

लेकिन आकृति द्वारा ये त्रिभुज सर्वांगसम नहीं हैं, अतः समान क्षेत्रफलों वाले दो त्रिभुज इस प्रकार खींचो कि वे सर्वांगसम न हों।

इस दशा में, इनकी परिमाण समान नहीं होगी।

प्रश्न 8. दो ऐसे त्रिभुज का चित्र दर्शाए जिनमें 5 अंग-युग्म समान होने पर भी त्रिभुज सर्वांगसम न हों।

हल : कोई भी दो त्रिभुज, केवल तीन अंग-युग्म समान होने पर सर्वांगसम होते हैं। लेकिन कुछ विशेष परिस्थितियों में SSA या AAA सर्वासमता प्रतिबंध पर्याप्त नहीं होता है जैसे-



चूँकि $\angle P = \angle X = 128^\circ$

$$\angle Q = \angle Y = 32^\circ$$

$$\angle R = \angle Z = 20^\circ$$

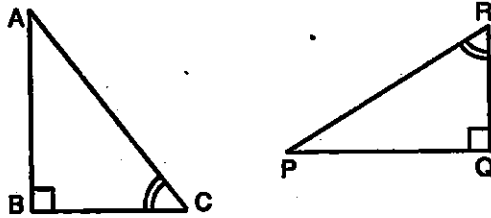
तथा भुजा PQ = भुजा XZ

भुजा PR = भुजा YZ

उपर्युक्त त्रिभुजों में तीनों संगत कोण आपस में बराबर हैं। परंतु उनके संलग्न भुजाओं का अनुपात भिन्न-भिन्न है।

अतः त्रिभुज सर्वांगसम नहीं होंगे।

प्रश्न 9. आकृति में एक सर्वांगसम भागों का एक अतिरिक्त युग्म बताइए जिससे $\triangle ABC$ और $\triangle PQR$ सर्वांगसम हो जाएँ। आपने किस प्रतिबंध का प्रयोग किया?

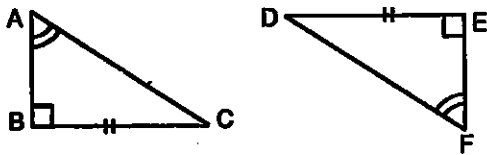


हल : $\triangle ABC \cong \triangle PQR$ सिद्ध करने के लिए संगत भागों के एक अतिरिक्त युग्म की आवश्यकता होगी वह है $BC = QR$

इसमें ASA सर्वांगसम प्रतिबंध का प्रयोग किया।

प्रश्न 10. चर्चा कीजिए, क्यों?

$$\triangle ABC \cong \triangle FED.$$



हल : निम्न कारणों से,

$$\triangle ABC \cong \triangle FED$$

$$\angle C = \angle D \quad (\angle A = \angle F, \angle B = \angle E)$$

\therefore तीसरा कोण $\angle C =$
तीसरा कोण $\angle D$

$$BC = DE \quad (\text{दिया है})$$

और $\angle B = \angle E \quad (\text{दिया है})$

अतः, ASA सर्वांगसम प्रतिबंध से परिणाम मिलेगा।

अभ्यास प्रश्नावली

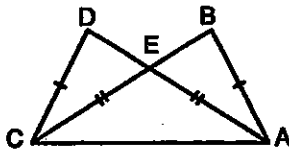
1. आकृति में, दिया है

$$AB = CD$$

और $AD = BC$

सिद्ध कीजिए

$$\triangle ADC \cong \triangle CBA$$

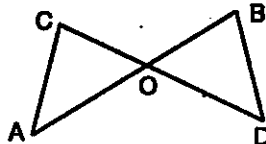


2. आकृति में, रेखाखंड AB और CD, O पर प्रतिच्छेद करते हैं। निम्न में से कौन-से कथन सत्य हैं?

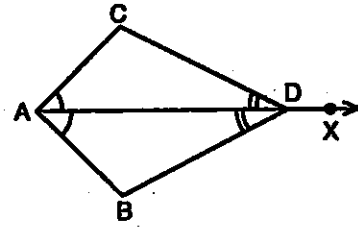
(i) $\triangle AOC \cong \triangle DOB$

(ii) $\triangle AOC \cong \triangle BOD$

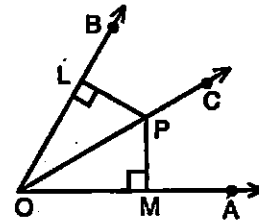
(iii) $\triangle AOC \cong \triangle ODB$



3. आकृति में, AX, $\angle BAC$ के साथ $\angle BDC$ को समद्विभाजित करता है। $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ के लिए तीन कथन की आवश्यकता होगी।



4. आकृति में $PL \perp OB$ और $PM \perp OA$ हैं तथा $PL = PM$ । क्या $\triangle PLO \cong \triangle PMO$? अपने उत्तर के पक्ष में कारण दीजिए।

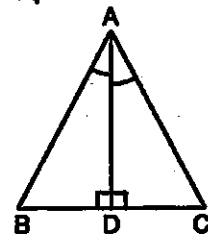


5. BD और CE, $\triangle ABC$ के शीर्षलंब हैं और $BD = CE$ है।

(i) क्या $\triangle BCD \cong \triangle CBE$?

(ii) उत्तर (i) में प्रयोग किए तीन सुमेलन युग्मों को बताइए।

6. $\triangle ABC$ में, $\angle BAC$ का समद्विभाजक BC पर लंब है। क्या $\triangle ABC$ समद्विभाजक है? अपने उत्तर के पक्ष में कारण दीजिए।



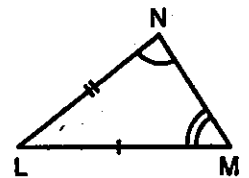
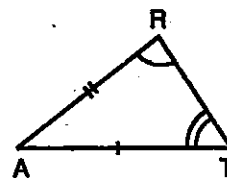
7. एक वर्गाकार शीट में समान क्षेत्रफल वाले दो आयत इस प्रकार खींचिए कि

(i) आयत सर्वांगसम हों।

(ii) आयत सर्वांगसम न हों।

8. आकृति में, दो त्रिभुज सर्वांगसम हैं। इसमें संगत भागों पर निशान लगे हैं। हम लिख सकते हैं

$$\triangle RAT \cong ?$$



उत्तरमाला

2. (ii) सत्य है
3. $\angle CAD = \angle BAD, \angle CDA = \angle BDA, AD = AD$
4. $\angle PLO = \angle PMO, OP = OP$ और $PL = PM$
8. $\triangle NLM$

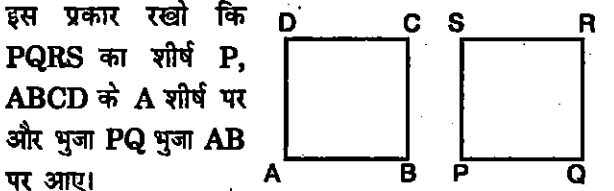
पृष्ठ 163

ज्ञानवर्धक क्रियाकलाप

हमने देखा कि अध्यारोपण तल-आकृतियों की सर्वांगसमता को जाँचने की एक उपयोगी विधि है। हमने रेखाखंडों, कोणों और त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए प्रतिबंधों का वर्णन किया। अब आप इस संकल्पना को बढ़ाकर तल की दूसरी आकृतियों के लिए प्रयत्न कर सकते हैं।

प्रश्न 1. अलग-अलग माप के वर्गों के कट-आउट (cut out) सोचिए। अध्यारोपण विधि का प्रयोग वर्गों की सर्वांगसमता के लिए प्रतिबंध ज्ञात करने के लिए कीजिए। कैसे "सर्वांगसम भागों" की संकल्पना सर्वांगसम के अंतर्गत उपभोग होती है? क्या यहाँ संगत भुजाएँ हैं? क्या यहाँ संगत विकर्ण हैं?

हल : हम जानते हैं कि समतल आकृतियाँ सर्वांगसम होती हैं जब वे एक दूसरे को ठीक-ठीक पूरा ढक लेती हैं क्योंकि वे आकृति और आकार में समान होती हैं। सभी वर्ग समान आकृति के होते हैं। लेकिन आकार वर्ग की भुजा की लंबाई पर निर्भर करता है। आकृति में दर्शाए अनुसार दो वर्ग ABCD और PQRS हैं। इन्हें देखो कि ये सर्वांगसम हैं या नहीं। PQRS वर्ग का कट आउट लो और ABCD वर्ग पर इस प्रकार रखो कि

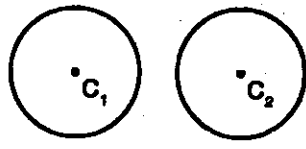


स्पष्टतः PQRS वर्ग, ABCD को पूर्णतः ढक लेता है। यदि $PQ = AB$, अतः दो वर्ग सर्वांगसम होंगे यदि उनकी भुजा की लंबाईयाँ समान हों।

या वर्ग $ABCD \cong$ वर्ग $PQRS$ यदि $AB = PQ$
यहाँ, हम एक वर्ग की किसी भी भुजा को दूसरे वर्ग की किसी भुजा के संगत ले सकते हैं (जैसे AB और PQ के बदले AB और QR)। दूसरी संगत भुजाओं के युग्म इसी प्रकार बदल जाएँगे। यही बात विकर्णों के लिए भी सत्य है।

प्रश्न 2. यदि आप वृत्त लेते हैं तो क्या होता है? दो वृत्तों की सर्वांगसमता के लिए प्रतिबंध क्या है? क्या, आप फिर अध्यारोपण विधि का प्रयोग कर सकते हैं? पता लगाइए।

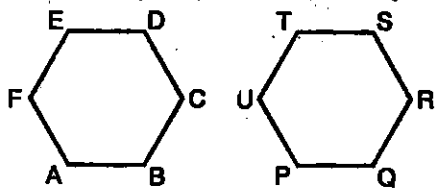
हल : हम जानते हैं कि सभी वृत्तों की समान आकृति होती है और वृत्त का आकार वृत्त की त्रिज्या पर निर्भर करता है। यह देखने के लिए कि वृत्त C_1 और C_2 सर्वांगसम हैं या नहीं। दोनों में से एक वृत्त का कट आउट लेकर (माना C_2 वृत्त) दूसरे वृत्त पर रखो। हम देखते हैं कि वृत्त C_2 वृत्त C_1 को पूरी तरह ठीक-ठीक ढक लेता है। यदि दो वृत्तों की त्रिज्याएँ समान होती हैं तो दोनों वृत्त सर्वांगसम होते हैं।



या वृत्त $C_1 \cong$ वृत्त C_2 यदि C_1 वृत्त की त्रिज्या = C_2 वृत्त की त्रिज्या।

प्रश्न 3. इस संकल्पना को बढ़ाकर तल की दूसरी आकृतियाँ, जैसे समषट्भुज इत्यादि के लिए प्रयत्न कीजिए।

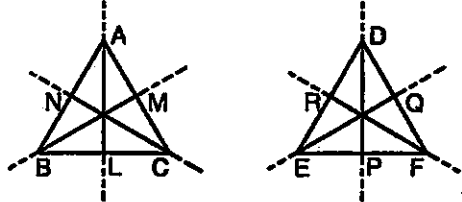
हल : हम जानते हैं कि समतल आकृतियाँ सर्वांगसम होती हैं यदि वे एक दूसरे को पूर्णतः ठीक-ठीक ढक लेती हैं। हम जानते हैं कि सभी समषट्भुज समान आकृति के होते हैं और इनका आकार समषट्भुज की भुजा की लंबाई पर निर्भर करता है। दो समषट्भुज ABCDEF और PQRSTU के कट आउट लो जिनमें से प्रत्येक की सभी भुजाएँ समान हों। अब देखो ये सर्वांगसम हैं अथवा नहीं।



PQRSTU का कट आउट लेकर ABCDEF पर इस प्रकार रखो कि P, A पर तथा भुजा PQ भुजा AB पर आएँ। हम देखते हैं कि PQRSTU, ABCDEF को पूर्णतः ठीक-ठीक ढक लेता है। यदि $PQ = AB$ हो। अतः, दो समषट्भुज सर्वांगसम होते हैं यदि इनकी भुजा की लंबाई समान हो।

या समषट्भुज $ABCDEF \cong$ समषट्भुज $PQRSTU$ यदि $AB = PQ$

प्रश्न 4. एक त्रिभुज की दो सर्वांगसम प्रतिलिपियाँ लीजिए। कागज को मोड़कर पता लगाइए कि क्या उनके शीर्षलंब बराबर हैं? क्या उनकी माध्यिकाएँ समान हैं? आप उनके परिमाण तथा क्षेत्रफलों के बारे में क्या कह सकते हैं?



हल : माना $\Delta ABC \cong \Delta DEF$

कागज को मोड़कर प्रत्येक त्रिभुज के शीर्ष बनाओ। हम देखते हैं

$AL = DP$, $BM = EQ$ और $CN = FR$ अर्थात् संगत शीर्षलंब समान हैं।

इसी प्रकार हम देख सकते हैं कि सर्वांगसम त्रिभुजों में संगत माध्यिकाएँ समान होती हैं और इनके परिमाण और क्षेत्रफल समान होते हैं।

बहुवैकल्पिक प्रश्न

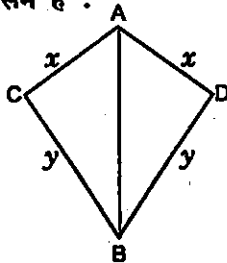
निम्नलिखित प्रश्नों के साथ दिए गए चार उत्तरों (a), (b), (c) और (d) में से ठीक उत्तर छाँटिए-

1. ΔABC में, $AD \perp BC$ है तो वह गुणधर्म जिससे ΔADB , ΔADC के सर्वांगसम नहीं है :

- (a) SAS गुणधर्म
- (b) SSS गुणधर्म
- (c) RHS गुणधर्म
- (d) AAA गुणधर्म

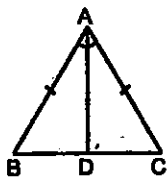
2. नीचे दी गई आकृति में, सर्वांगसमता के किस गुणधर्म से ΔABC और ΔABD सर्वांगसम हैं :

- (a) SAS गुणधर्म
- (b) SSS गुणधर्म
- (c) ASA गुणधर्म
- (d) AAA गुणधर्म



3. नीचे दी गई आकृति में, किस गुणधर्म से $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ है।

- (a) SAS गुणधर्म
- (b) SSS गुणधर्म
- (c) RHS गुणधर्म
- (d) ASA गुणधर्म

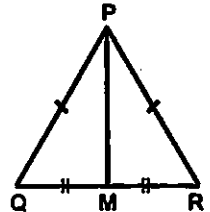


4. ΔABC में, $AD \perp BC$, $\angle B = \angle C$ और $AB = AC$. वह गुणधर्म जिससे यह नहीं कहा जा सकता कि $\Delta ADB \cong \Delta ADC$ है :

- (a) SAS गुणधर्म
- (b) SSS गुणधर्म
- (c) RHS गुणधर्म
- (d) ASA गुणधर्म

5. नीचे दी गई आकृति में, यदि $PQ = PR$ और $QM = MR$ है, तो $\angle PMR$ का मान होगा :

- (a) 60°
- (b) 120°
- (c) 90°
- (d) इनमें से कोई नहीं



6. निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सत्य है?

- (a) दो रेखाखंडों की लंबाई समान हो तो वह सर्वांगसम होते हैं।
- (b) समान भुजाओं वाले दो वर्ग सर्वांगसम होते हैं।
- (c) समान त्रिज्या वाले वृत्त सर्वांगसम होते हैं।
- (d) उपरोक्त सभी।

7. यदि दो त्रिभुजों के संगत कोण समान हों, तो वे सदैव सर्वांगसम होते हैं।

- (a) सत्य
- (b) असत्य
- (c) ज्ञात नहीं कर सकते
- (d) इनमें से कोई नहीं

8. निम्नलिखित में से कौन-से कथन असत्य हैं?

- (a) समान क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।
- (b) यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और एक कोण दूसरे त्रिभुज की संगत भुजाओं और कोण के समान हों, तो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।
- (c) यदि एक समकोण त्रिभुज का कर्ण दूसरे समकोण त्रिभुज के कर्ण के समान हो, तो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।
- (d) उपरोक्त सभी।

उत्तरमाला : 1. (d), 2. (b), 3. (a), 4. (b), 5. (c), 6. (d), 7. (b), 8. (d).